Vol. 3, No. 1, Januari-Juni 2018
e-ISSN : 2528-5718

JISTech

(Journal of Islamic Science and Technology)

Diterbitkan Oleh :
Fakultas Sains Dan Teknologi
UIN Sumatera Utara Medan

PEMBUKTIAN IDENTITAS TRIGONOMETRI MENGGUNAKAN RUMUS EULER

Maimunah Rahmadani[1], Hendra Cipta[2], Abdul Halim Hasugian[3]
[1)] Pascasarjana Matematika, Universitas Sumatera Utara Medan
[2)] Prodi Matematika UIN Sumatera Utara Medan
[3)] Prodi Ilmu Komputer UIN Sumatera Utara Medan
Email: maimunahrahma@yahoo.com, hendracipta@uinsu.ac.id

Abstrak: Tulisan ini telah membuktikan beberapa identitas trigonometri antara lain $\sin 2\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ menggunakan Rumus Euler pada bilangan kompleks dengan menguraikan norm, argmen dari e^{x+iy} dan mengambil $e^x = e^{i\theta}$ dari Rumus Euler.

Kata Kunci : norm, argumen e^{x+iy}, Identitas Trigonometri, Rumus Euler

Abstract : *This paper has proved some trigonometric identities such as* $\sin 2\theta$, $\sin 3\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ *using the Euler formula on complex numbers by describing the norms, arguments of* e^{x+iy}, *and taking* $e^x = e^{i\theta}$ *with the properties of the Euler formula.*

Keywords: *norm, argument* e^{x+iy}, *trigonometric identities, Euler formula*

Pendahuluan

Trigonometri pada dasarnya bermula dari fungsi yang menyatakan hubungan/relasi angular pada bidang dan bentuk tiga dimensi. Namun, pada perkembangannya fungsi trigonometri tidak lagi hanya berkutat pada studi geometri bidang dan ruang, tetapi juga mengembangkan studinya pada analisis aljabar. Studi trigonometri pada analisis aljabar sangat diperlukan untuk mempermudah analisis sifat-sifat geometrinya juga.

Rumus Euler dinamakan untuk Leonhard Euler merupakan Rumus matematika dalam analisis kompleks yang menunjukkan hubungan mendalam antara fungsi trigonometri dan fungsi eksponensial. Rumus Euler menyatakan bahwa, untuk setiap bilangan real *x*, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ dimana *e* merupakan basis logaritma natural, *i* unit imajiner, sin *x* dan cos *x* merupakan fungsi trigonometri (Priestley, 1993).

Tulisan ini akan memberikan pembuktian untuk beberapa identitas trigonometri dengan menggunakan Rumus Euler pada bilangan kompleks.

Kajian Teori

Identitas Trigonometri

Studi yang membahas sudut Studi yang membahas sudut dan relasi angular pada bidang dan bentuk tiga dimensi dikenal sebagai trigonometri. Fungsi trigonometri (juga dikenal sebagai fungsi sirkular) terdiri dari *cosecan* (csc *x*)), *cosinus* (cos *x*)), *cotangen* (cot *x*)), *secan* (sec *x*)), *sinus* (sin *x*)), dan *tangen* (tan *x*)). Invers dari fungsi-fungsi tersebut secara berturut-turut dinotasikan $\csc^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\cot^{-1}$, $\sec^{-1}$, $\sin^{-1}$ dan $\tan^{-1}$. Perlu diperhatikan penotasian tersebut bermakna invers dari fungsi aslinya bukan pangkat -1 dari fungsi aslinya.

Identitas trigonometri yang diturunkan melalui rumus-rumus dan sifat geometri bidang maupun bentuk tiga dimensi diantaranya (R. Courant, 1950).

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \tag{1}$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \tag{2}$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \tag{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \tag{4}$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \tag{5}$$

$$\sin\left(\theta \pm \theta\right) = \sin\theta\cos\theta \pm \cos\theta\sin\theta \tag{6}$$

$$\cos\left(\theta \pm \theta\right) = \cos\theta\cos\theta \mp \sin\theta\sin\theta \tag{7}$$

Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks adalah pasangan terurut dari dua bilangan real *x* dan *y* yang dinyatakan dengan lambang $z = (x, y)$. Himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai $C = \{z : z = (x, y) : x, y \in \Re\}$. Pada bilangan kompleks $z = (x, y)$, dimana nilai *x* disebut bagian real bilangan kompleks *z* dan nilai *y* disebut bagian imajiner bilangan kompleks *z* yang masing-masing diberi simbol $x = \mathrm{Re}(z)$ dan $y = \mathrm{Im}(z)$. Bilangan kompleks *z* disebut bilangan imajiner murni, bila $\mathrm{Re}(z) = 0$ dan $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. Sedangkan jika

$\mathrm{Re}(z)=0$ dan $\mathrm{Im}(z)=1$, maka *z* disebut satuan imajiner yang dilambangkan dengan $i=(1,0)$ (Agarwal, 2010).

Rumus Euler

Dalam hal ini untuk mendapatkan penurunan Rumus Euler, peneliti akan menguraikan norm dan argmen dari e^{x+iy} untuk mendapatkan bentuk umum dari Rumus Euler.

Dengan norm dari e^{x+iy} dan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$,

Analogikan $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$,

sehingga,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

(Richard, 1965)

Dari Rumus diatas berlaku untuk bilangan kompleks *z*, maka dengan mensubstitusikan $x=z$, didapat $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ dimana $z = x+iy$ (bilangan kompleks dalam koordinat kartesius) (Choudry, B., 1983).

Sehingga,

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

$$e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$$

$$e^{x+iy} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\left(\frac{y}{n}\right)\right]^n \qquad (8)$$

Maka norm dari e^{x+iy} adalah:

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2}\right]^n$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^n$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}n}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n}}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2n}\right)}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\frac{x^2+y^2}{2(\infty)}\right)}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(x+0)}$$

$$\left|e^{x+iy}\right| = e^{x} \qquad (9)$$

Untuk mencari argument dari e^{x+iy}, diperlukan bilangan kompleks dalam koordinat polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dengan $\tan\theta = \frac{y}{x}$, sehingga $\theta = \text{arc } \tan\frac{y}{x}$ dan $z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$. Dimana $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$ berdasarkan Teorema De'Moivre. Dengan $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ maka $\arg(z^n) = n\,\text{arc } \tan\frac{y}{x}$.

Berdasarkan persamaan (8) telah diperoleh $e^{x+iy} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+i\left(\frac{y}{n}\right)\right]^n$,

$$\arg\left(e^{x+iy}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\arctan\frac{\frac{y}{n}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right)$$

$$\arg\left(e^{x+iy}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\arctan\frac{y}{n+x}\right)$$

$$\arg\left(e^{x+iy}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\arctan\frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}}\right)\frac{y}{n+x}$$

karena $\lim_{t\to\infty} n\left(\frac{\arctan\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)=1$,

maka $\arg\left(e^{x+iy}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{yn}{n+x}$ atau $\arg\left(e^{x+iy}\right)=y$

sehingga,

$$\arg\left(e^{x+iy}\right)=y \tag{10}$$

Bilangan kompleks dalam koordinat polar $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ dimana $r=|z|$ dan $\theta=\arg\left(z\right)$, maka

$$z=|z|\left[\cos\arg\left(z\right)+i\sin\arg\left(z\right)\right] \tag{11}$$

Ambil $z=e^{x+iy}$, maka persamaan (10) akan berubah menjadi:

$$e^{x+iy}=\left|e^{x+iy}\right|\left[\cos\arg\left(e^{x+iy}\right)+i\sin\arg\left(e^{x+iy}\right)\right] \tag{12}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (9) dan (10) pada (12), maka persamaan (12) menjadi:

$$e^{x+iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$$

$$e^{x}e^{iy}=e^{x}\left(\cos y+i\sin y\right)$$

sehingga,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{13}$$

Dengan mensubstitusikan $y=\theta$ pada persamaan (13), maka persamaan diperoleh

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{14}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \tag{15}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{16}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \tag{17}$$

Metode Penelitian

Penelitian ini bersifat pengembangan keilmuan dengan hasil kajiannya berupa konstruksi teori yang memiliki nilai penerapan yang tinggi dalam mempercepat pengembangan ilmu matematika murni. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur). Pengumpulan data dan informasi serta materi yang bersangkutan dengan penelitian ini terdapat di ruang perpustakaan seperti buku, jurnal, dokumentasi dan media internet. Metode yang digunakan dalam penyelesaian permasalahan pada penelitian ini mengacu pada langkah-langkah penelitian teoritik yang meliputi subjek dan objek penelitian, tahap penelitian, dan tahap pengembangan.

Hasil Dan Pembahasan

Dengan mengacu pada kajian teori diatas akan dibuktikan beberapa identitas trigonometri dengan menggunakan Rumus Euler.

2.1. Pembuktian $\sin 2\theta$

Dengan menggunakan persamaan (6), (16), dan (17) maka:

$$\sin 2\theta = \sin(\theta+\theta)$$

$$= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$$
$$= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) + \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{0} - e^{0} - e^{-2i\theta}}{4i}\right) + \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{0} + e^{0} - e^{-2i\theta}}{4i}\right)$$
$$= \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}\right) + \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}\right)$$
$$= \frac{2e^{2i\theta} - 2e^{-2i\theta}}{4i}$$
$$= 2\left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}\right)$$
$$= \frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{2i}$$
$$= \sin 2\theta$$

2.2. Pembuktian $\sin 3\theta$

Dengan menggunakan persamaan (14), (15), (16), dan (17) maka:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$= 3\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$$
$$= \left(\frac{3e^{i\theta} - 3e^{-i\theta}}{2i}\right) - 4\left(\frac{e^{i\theta+i\theta+i\theta} - e^{i\theta-i\theta+i\theta} - e^{-i\theta+i\theta+i\theta} + e^{-i\theta-i\theta+i\theta} - e^{i\theta+i\theta-i\theta} + e^{i\theta-i\theta-i\theta} + e^{-i\theta+i\theta-i\theta} - e^{i\theta-i\theta-i\theta}}{-8i}\right)$$
$$= \left(\frac{3e^{i\theta} - 3e^{-i\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3i\theta} - e^{i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \left(\frac{3e^{i\theta} - 3e^{-i\theta}}{2i}\right) + \left(\frac{e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}\right)$$
$$= \frac{3e^{i\theta} - 3e^{-i\theta} + e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$
$$= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i}$$
$$= \sin 3\theta$$

sehingga dapat ditunjukkan bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

2.3. Pembuktian $\cos 2\theta$

Dengan menggunakan persamaan (6), (16), dan (17) maka:

$$\cos 2\theta = \cos\left(\theta+\theta\right)$$

$$= \cos\theta\cos\theta - \sin\theta\sin\theta$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right) - \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2i\theta}+e^{0}+e^{0}+e^{-2i\theta}}{4}\right) - \left(\frac{e^{2i\theta}-e^{0}-e^{0}+e^{-2i\theta}}{-4}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2}{4}\right) + \left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}-2}{4}\right)$$

$$= \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}+2+e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}-2}{4}$$

$$= \frac{2e^{2i\theta}+2e^{-2i\theta}}{4}$$

$$= \frac{2\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)}{4}$$

$$= \frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}$$

$$= \cos 2\theta$$

2.4. Pembuktian $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$$

$$= \left(\sin\theta\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$$

$$= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2i\theta}-e^{0}-e^{0}+e^{-2i\theta}}{-4}\right)$$

$$= \left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}-2}{-4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2e^{2i\theta}-2e^{-2i\theta}}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(2\cos^2\theta - 1\right) + \frac{1}{2}$$

$$= -\cos^2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 1-\cos^2\theta$$

sehingga dapat ditunjukkan bahwa $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$.

2.5. Pembuktian $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

Dengan menggunakan persamaan (14), (15), (16), dan (17) maka:

$$
\begin{aligned}
\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \\
&= (\cos\theta)^2 \\
&= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{0} + e^{0} + e^{-2i\theta}}{4}\right) \\
&= \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} \\
&= \left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4}\right) + \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2\theta\right) + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \sin^2\theta + \frac{1}{2} \\
&= 1 - \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

sehingga dapat ditunjukkan bahwa $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$.

Kesimpulan

Telah dibuktikan beberapa identitas trigonometri dengan menggunakan Rumus Euler dengan mensubstitusikan sifat-sifat Rumus Euler pada persamaan (14), (15), (16), dan (17). Sehingga diperoleh sebuah pembuktian untuk beberapa identitas trigonometri dengan Rumus Euler.

Daftar Pustaka

Agarwal, Ravi P, et.al, 2010. *An Introduction to Complex Analysis*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London.

Brown, James Ward and Ruel V. Churchill, 1965. *Complex Variables And Applications*, Seventh Edition, New York: Mc. Graw-Hill Publishing Company.

Choudry, B., 1983, *The Element of Complex Analysis*. New Delhi: Wiley Eastern Limited.

Conway, J.B, 1995: *Function of one complex variable*, McGraw-Hill.

Courant, Richard and Fritz John, 1965. Introduction To Calculus And Analysis, New York University Interscience Publishers.

Desphande, J.V., 1986: *Complex analysis*, McGraw-Hill.

Grinstein, Louise S, et.al, 1977, *Calculus Reading From Mathmatics Teachers,* New York: University of New York Brooklyn.

Purcell, EJ, Varberg,D. 1997. Calculus. Prentice-Hall,Inc., USA.

Yue, Kuen Kwok, 2010. *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers* Second Edition, New York: Cambridge University Press.

R. Courant, 1950, *Differential And Integral Calculus*, New York: Interscience Publishers, Inc.

Rudin, W., 1996: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill.

Shaw, W., 2006. *Complex Analysis With Mathematica*, Cambridge University Press.

Thomas, George. B, Ross L. Finney, 1998, *Calculus and Analytic Geometry 9th Edition*, Massachasetts Institute of Technology: Addison-Wesley Publishing Company.

Wexler, 1964, *Analytic Geometry: A Vector Approach,* Addison Wesley.