ISSN 2087-8249
E-ISSN 2580-0450
DOI: https://doi.org/10.30821/axiom.v12i2.18061

AXIOM : Jurnal Pendidikan dan Matematika
Volume 12, No. 2, 2023, 178-188
Available *online* at: http://jurnal.uinsu.ac.id/index.php/axiom

ESTIMASI BAYESIAN PADA PARAMETER HUKUM MOTALITA GOMPERTZ MENGGUNAKAN ALGORITMA METROPOLIS-HASTINGS

BAYESIAN ESTIMATION OF GOMPERTZ MORTALITY LAW PARAMETERS USING THE METROPOLIS-HASTINGS ALGORITHM

Yulinda Eliskar[1]*, Rustam[2], Nina Fitriyati[3], Khaerudin Saleh[4]
[1,2,4]Telkom University, Jalan Telekomunikasi, Bandung, Jawa Barat 40257, Indonesia,
[3]UIN Syarif Hidayatullah, Jalan Ir. H. Juanda No.95, Tangerang Selatan, Banten 15412, Indonesia
E-mail: *yulindaeliskar@telkomuniversity.ac.id

Abstrak
Tingkat mortalitas merupakan salah satu hal penting untuk menentukan nilai premi pada suatu produk asuransi. Pada umumnya, perusahaan asuransi menggunakan tabel mortalitas deterministik yang dibangun dari data kematian masa lalu. Namun pada kenyataannya, tingkat mortalitas dipengaruhi oleh faktor-faktor ketidakpastian yang menyebabkan tingkat mortalitas tersebut berubah secara stokastik. Pada penelitian ini, akan dikaji pengaruh mortalitas stokastik dalam mengestimasi parameter hukum mortalitas Gompertz menggunakan pendekatan analisis Bayesian sehingga parameter-parameter pada hukum mortalitas Gompertz tidak lagi berbentuk konstanta, namun memiliki distribusi. Estimasi Bayesian dilakukan dengan asumsi distribusi prior adalah normal. Pelibatan unsur stokasik dilakukan dengan menambahkan gangguan mortalitas $\in$ yang dinyatakan dalam persentase dari *force of mortality* μ_{x+t} dengan rentang $-1 \leq \in \leq 1$. Simulasi numerik dilakukan menggunakan *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) dengan Algoritma Mettopolis-Hastings. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan $l_0 = 100000$ dan $l_{111} = 0$, diperoleh nilai m^* berdistribusi normal dengan mean 0.001665164 dan variansi $9{,}525 \times 10^{-9}$ dan C^* berdistribusi normal dengan mean 1.081264461 dan variansi $6{,}312134 \times 10^{-7}$. Hasil ini dapat digunakan sebagai kerangka kerja yang lebih akurat untuk menganalisis keandalan, ketahanan, dan pembiayaan dalam dunia aktuaria, serta memberikan dasar yang lebih baik untuk pengelolaan risiko perusahaan.

Kata Kunci: Mortalita stokastik, Algoritma Metropolis-Hastings, Hukum mortalita Gompertz, Analisis Bayesian

Abstract
The mortality rate is a crucial factor in determining the premium value for an insurance product. Typically, insurance companies use deterministic mortality tables that are built from past death data. However, in reality, the mortality rate is influenced by various uncertainty factors that cause it to change stochastically. In this research, we will study the influence of stochastic mortality in estimating the parameters of the Gompertz mortality law using a Bayesian analysis approach. This will enable us to model the parameters in the Gompertz mortality law as a distribution rather than a constant value. Bayesian estimation is carried out assuming the prior distribution is normal. The involvement of stochastic elements is carried out by adding mortality disturbance $\in$ *which is expressed as a percentage of the force of mortality* μ_{x+t} *with a range of* $-1 \leq \in \leq 1$. *Numerical simulations were carried out using Markov Chain Monte Carlo (MCMC) with the Mettopolis-Hastings Algorithm. The simulation results show that with* $l_0 = 100000$ *and* $l_{111} = 0$*, the m* value is normally distributed with a mean of 0.001665164 dan and a variance of* $9{,}525 \times 10^{-9}$ *and C* is normally distributed with a mean of 1.081264461 and a variance of* $6{,}312134 \times 10^{-7}$*. These results can be used as a more accurate framework for analyzing reliability, resilience and financing in the actuarial world, as well as providing a better basis for enterprise risk management.*

***Keywords**: Stochastic mortality, Metropolis-Hastings algorithm, Gompertz mortality law, Bayesian analysis.*

PENDAHULUAN

Untuk menghitung premi asuransi, seorang aktuaris umumnya menggunakan intensitas kematian yang bersifat deterministik, yang hanya bergantung pada usia dan suku bunga yang konstan (Lenart, 2012; Miasary, 2022; Tai & Noymer, 2018). Akan tetapi, pada kenyataannya banyak penyebab kematian yang tidak diperhitungkan dalam peluang kematian diantaranya bencana alam, musibah, wabah, dan kecelakaan dan resiko lainnya. Sehingga seiring berjalannya waktu, intensitas kematian seringkali tidak sesuai dengan prediksi. Contohnya adalah untuk kontrak asuransi 30 tahun atau lebih, intensitas kematian atau suku bunga di awal kontrak tampak aman, namun di masa depan faktanya tidak demikian (Dahl, 2004).

Salah satu model yang dapat digunakan untuk mengestimasi tingkat kematian adalah hukum mortalita Gompertz. Hukum mortalita Gompertz menyatakan bahwa angka kematian manusia adalah jumlah dari komponen yang bergantung pada usia yang meningkat secara eksponensial seiring bertambahnya usia dan komponen yang tidak bergantung pada usia. Beberapa penelitian telah dikembangkan untuk mengestimasi parameter hukum mortalita Gompertz menggunakan metode maximum likelihood (Garg et al., 1970; Putra et al., 2019), maximum likelihood dengan *two-bias correction* (Al-Shomrani, 2023). Namun karena tingkat kematian mengandung unsur yang tidak terduga, beberapa peneliti mengestimasi parameter Hukum mortalita Gompertz dengan pendekatan stokastik. Salah satu pendekatan stokastik yang umum digunakan adalah Bayesian (Abo-Kasem et al., 2023; Feroze & Aslam, 2013; Hegazy et al., 2021), maximum likelihood, dan pendekatan Bayesian pada sampel set berperingkat (*ranked-set sample*) (Obeidat et al., 2020).

Dalam jurnalnya Putra (2019), parameter hukum mortalita Gompertz secara numerik menggunakan metode Newton-Raphson dan menurut Abo-Kasem (2023) mengestimasi hukum mortalita Gompertz dengan distribusi prior adalah gamma. Pada penelitian ini, estimasi parameter Hukum mortalita Gompertz menggunakan pendekatan Bayesian dimana distribusi prior diasumsikan normal. Pelibatan unsur stokasik dilakukan dengan menambahkan gangguan mortalitas $\in$ yang dinyatakan dalam persentase dari *force of mortality* μ_{x+t} dengan rentang $-1 \leq \in \leq 1$. Pelibatan unsur stokastik dipandang perlu untuk menghitung tingkat kematian dalam memprediksi nilai premi dan pertanggungan dalam perusahaan asuransi maupun anuitas. Pada penelitian ini pemberian unsur stokasik dilakukan pada perhitungan peluang hidup dalam hukum mortalita Gompertz. Tabel mortalita yang digunakan mengacu pada *Life table for total Population: United State, 1979-1981* (Bowers, 1986) dengan nilai $l_0 = 100000$ dan $l_{111} = 0$. Simulasi numerik akan dilakukan menggunakan *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) dengan Algoritma *Metropolish-Hasting*. Oleh karena itu, stokastik mortalitas digunakan sebagai kerangka kerja yang lebih akurat untuk menganalisis keandalan, ketahanan, dan pembiayaan dalam dunia aktuaria saat ini, serta diharapkan mampu memberikan dasar yang lebih baik untuk pengelolaan risiko mortalitas.

METODE

Fungsi Survival

Misalkan diberikan anak yang baru lahir. Usia saat anak yang baru lahir ini meninggal, X, adalah sebuah variable acak kontinu. Misalkan $F_X(x)$ menyatakan fungsi distribusi dari X, maka $F_X(x) = \Pr(X \leq x)\, x \geq 0,$ sementara diketahui bahwa $s(x) = 1 - F_X(x)$. Dengan mengasumsikan $F_X(0) = 0$, berarti $s(0) = 1$. Sehingga untuk setiap x positif, maka peluang seorang yang baru lahir akan mencapai usia x tahun dinyatakan dalam $s(x)$.

Distribusi dari X dapat didefinisikan dengan menentukan fungsi $F_X(x)$ atau fungsi $s(x)$, maka peluang bahwa seorang yang baru lahir meninggal antara usia x dan $z (x < z)$ adalah

$$\Pr(x < X \leq z) = F_X(z) - F_X(x) = s(x) - s(z)$$

Simbol (x) digunakan untuk menyatakan *usia hidup sampai* $\boldsymbol{x}$ *tahun.* Sisa hidup dari (x), $X - x$, dinyatakan oleh $T(x)$. Fungsi distribusi dari $T(x)$ yang dinyatakan oleh ${}_tq_x$ adalah

$F_{T(x)}(x), t \geq 0$. Dimana ${}_tq_x$ menyatakan peluang (x) akan meninggal kurang dari atau sama dengan t tahun lagi. Sedangkan peluang (x) akan mencapai usia $x + t$ disebut ${}_tp_x$. Maka ${}_tp_x = \Pr[T(x) > t]$.[1]. Selanjutnya distribusi dari X akan diberikan oleh fungsi *hazard rate*. *Hazard rate* adalah density bersyarat pada saat t.

Dalam konteks aktuaria *hazard rate* dikenal dengan sebutan "*force of mortality*", dan dinyatakan oleh

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr(x < X \leq x + \Delta x \mid X > x)}{\Delta x} = \frac{f_X(x)}{\left(1 - F_x(x)\right)}, \tag{1}$$

dengan $F_X{}'(x) = f_X(x)$ adalah pdf dari variable acak untuk kematian *continuous age*. Jika persamaan (1) ditulis dalam bentuk fungsi survival, maka

$$\mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)}. \tag{2}$$

Sifat $f_x(x)$ dan $1 - F_x(x)$ mengimplikasikan bahwa $\mu(x) \geq 0$. Sementara itu, *force of mortality* dapat digunakan untuk menentukan distribusi dari X. Maka hubungan antara *force of mortality* dan ${}_tp_x$ adalah

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_x^{x+t} \mu(y)dy\right) \tag{3}$$

dengan $s = y - x$, sehingga diperoleh

$${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu(x+s)ds\right) \tag{4}$$

Jika $F_{T(x)}(t)$ dan $f_{T(x)}(t)$ menyatakan, df dan pdf dari $T(x)$, masa hidup dari (x). Maka berdasarkan persamaan (4) , maka untuk $t \geq 0$

$$f_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}\,{}_tq_x = {}_tp_x\,\mu(x+t) \tag{5}$$

Jadi ${}_tp_x\,\mu(x+t)$ adalah peluang bahwa (x) akan meninggal antara t dan $t + dt$, dan

$$\int_0^\infty {}_tp_x\,\mu(x+t)\,dt = 1 \tag{6}$$

Hukum Mortalita Gompertz

Force of mortality pada hukum Gompertz dinyatakan dengan $\mu(x+t) = BC^{x+t}$ dengan B dan C adalah suatu konstanta $(B, C \geq 0)$[1]. Peluang seorang yang berusia x akan hidup t tahun lagi pada hukum mortalita Gompertz dinyatakan dengan

$${}_tp_x = \exp\left(-mC^x(C^t - 1)\right), \tag{7}$$

dengan $m = \frac{B}{\ln C} \geq 1$. Untuk $x = 0$ diperoleh

$${}_tp_0 = \exp\left(-m(C^t - 1)\right). \tag{8}$$

Sedangkan untuk menyatakan bayi tersebut akan mencapai usia x, artinya $x = 0$ menyatakan dan $t = x$, maka peluang hidup dapat dituliskan

$${}_xp_0 = \exp\left(-m(C^x - 1)\right). \tag{9}$$

Pada fungsi survival $s(x) = \frac{l_x}{l_0}$, dimana l_x menyatakan ekspektasi jumlah individu yang akan mencapai usia x, dan l_0 menyatakan ekspektasi jumlah individu yang baru lahir. Maka l_x dapat dinyatakan sebagai Rumus 10.

$$l_x = l_0 s(x) \tag{10}$$

Dengan l_0 adalah banyaknya bayi yang baru lahir (usia 0 tahun) dan $s(x)$ maka fungsi survival nya dapat dinyatakan sebagai Rumus 11.

$$s(x) = \Pr[X > x] = \Pr[T(x) > x] = {}_xp_0. \tag{11}$$

Sehingga untuk untuk persamaan mortalitas deterministik, l_x dapat dinyatakan sebagai:

$$l_x = l_0\, {}_xp_0 = l_0\, exp\big(-m(C^x - 1)\big). \tag{12}$$

Mortalitas Stokastik

Seperti dibicarakan sebelumnya pada pendahuluan bahwa secara tradisional penghitungan premi dan cadanyang biasanya dilakukan secara deterministik. Yang hanya bergantung pada fungsi usia dan tingkat bunga yang konstan. Namun pada dasarnya tingkat suku bunga maupun kematian tidak bersifat deterministik (Dahl, 2004).

Kematian bersifat yang stokastik ditafsirkan sebagai distribusi probabilitas yang menggambarkan "tingkat kepercayaan" tentang ketidakpastian dalam evolusi kematian di masa depan. Pengaturan model stokastik yang demikian berati besifat deterministik. model stokastik ini membedakan antara risiko kematian yang tidak sistematis yang berasal dari keacakan fungsi kelangsungan hidup (parameter) tertentu (Liu, 2008).

Pada penelitian kali ini, mortalitas stokastik disimbolkan dengan " $\in$ " yang menyatakan persentase dari *force of mortality* μ_{x+t} dengan rentang $-1 \leq \in \leq 1$, dengan peluang 1.

Jika peluang hidup untuk seorang yang berusia x akan hidup sampai t tahun lagi dalam kondisi deterministik adalah ${}_tp_x = exp(-\mu_{x+t})$, maka untuk peluang hidup dengan unsur stokastik akan dinyatakan sebagai (Cox & Lin, 2007)

$${}_tp_x * = ({}_tp_x)^{1-\in} = \big(exp(-\mu_{x+t})\big)^{1-\in} \tag{11}$$

Ketika fungsi survival yang diberi stokastik, maka harus dibuktikan bahwa $F_{T*(x)}$ adalah suatu fungsi distribusi. Adapun syarat $F(x)$ suatu fungsi distribusi dari variable acak non negative X maka yang harus dipenuhi adalah:

1. $F(0) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$
3. $F(x)$ adalah fungsi monoton naik

Sehingga untuk $F_{T*(x)} = 1 - {}_tp_x * = 1 - ({}_tp_x)^{1-\in}$ dengan ${}_tp_x$ mengikuti hukum gomperts, dengan $\in$ yang telah ditentukan sebelumnya, didapat :

$$F_{T*(x)}(t) = 1 - \Big(exp\big(-mC^x(C^t - 1)\big)\Big)^{(1-\in)}, \tag{12}$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $F_{T*(x)}(t)$ adalah fungsi distribusi

1. $F_{T*(x)}(t) = 1 - \Big(exp\big(-mC^x(C^t - 1)\big)\Big)^{(1-\in)}$

   $F_{T*(x)}(0) = 1 - \Big(exp\big(-mC^x(C^0 - 1)\big)\Big)^{(1-\in)}$

   $= 1 - \big(exp(0)\big)^{(1-\in)} = 1 - 1 = 0$ *(syarat dipenuhi)*
2. $\lim\limits_{x\to\infty} F_{T*(x)}(t) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \Big(exp\big(-mC^x(C^t - 1)\big)\Big)^{(1-\in)}\right)$

   Karena $-1 \leq \in \leq 1$ maka $\lim\limits_{x\to\infty} F_{T*(x)}(t) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \big(exp(-\infty)\big)^{(1-\in)}\right)$

   $= 1 - 0 = 1\ (syarat\ dipenuhi)$
3. Akan dibuktikan $F_{T*(x)}(t)$ adalah fungsi monoton naik

   Misalkan $t_1 < t_2$, Maka

   $$\Big(exp\big(-mC^x(C^{t_1} - 1)\big)\Big)^{(1-\in)} > \Big(exp\big(-mC^x(C^{t_2} - 1)\big)\Big)^{(1-\in)}$$

   Karena $-1 \leq \in \leq 1$ dan $C > 1$, maka

$$F_{T*(x)}(t_1) < F_{T*(x)}(t_2)$$

Sehingga $F_{T*(x)}(t)$ adalah fungsi monoton naik

Dari (1), (2) dan (3) terbukti bahwa $F_{T*(x)}(t)$ adalah fungsi distribusi

Sehingga ${}_t p_x^*$ dapat digunakan sebagai fungsi survival untuk mortalitas stokastik. Oleh karena itu, untuk mortalitas dengan unsur stokastik $l_x = l_0 \exp\big(-m(C^x - 1)(1-\epsilon)\big)$ selanjutnya parameter m dan c yang sudah diberi unsur stokastik akan dianalisis menggunakan Bayesian dengan menuliskan persamaan baru yaitu $l_x = l_0 \exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big)$ dengan m^* dan C^* adalah parameter yang sudah mengandung unsur stokastik.

Analisis Bayesian pada Mortalitas Stokastik

Model persamaan survival dengan unsur stokastik $l_x = l_0 \exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big)$ dapat ditulis dalam bentuk $s(x) = \exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big)$ yang merupakan bentuk persamaan eksponensial. Selanjutnya akan digunakan inferensi Bayesian dalam model regresi non linier, untuk menganalisis parameter m^* dan C^*, sehingga model regresi non linier akan mempunyai bentuk

$$s(x) = \exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big) + \varepsilon. \tag{13}$$

Dengan menuliskan $s(x) = y_i$ dan $\exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big) = f(X_i, \beta)$ dimana β berisi parameter yang akan dicari yaitu m^* dan C^* , maka persamaan (13) dapat dituliskan ke dalam bentuk model regresi linier yang lebih umum yaitu

$$y_i = f(X_i, \beta) + \varepsilon_i. \tag{14}$$

dengan ε adalah $N(0_N, h^{-1} I_N)$ dan X adalah nilai yang *fix* (bukan variable acak) [6].

Inferensi Bayesian dengan noninformative prior memerlukan fungsi *likelihood* $l(\beta|y)$ secara aljabar identik dengan fungsi gabungan didefinisikan sebagai *joint probability function* untuk semua data $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ dengan β adalah parameter-parameter yang tidak diketahui. Dengan menggunakan definisi dari multivariat normal *density*, kita dapat menuliskan fungsi *likelihood* dari suatu model regresi sebagai berikut (Koop, 2003):

$$p(y|\beta, \sigma) = \frac{h^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ \exp\left\{ -\frac{h}{2} \{y - f(X_i, \beta)\}' \{y - f(X_i, \beta)\} \right\} \right\}. \tag{15}$$

Pemilihan prior untuk β dan h pada penelitian ini menggunakan *non-informatif prior* untuk membentuk *posterior density* nya sehingga *prior density* yang kita punya adalah

$$p(\beta, h) \propto \frac{1}{h}. \tag{16}$$

Setelah *prior density function* ditentukan, langkah selanjutnya adalah menentukan *posterior density function*. dengan memanfaatkan *Bayes' rule*

$$p(\beta, h|y) \propto l(\beta, h|y) p(\beta, h). \tag{17}$$

dengan *prior density function* (15) dan *likelihood function* (16) maka :

$$p(\beta, h|y) \propto \frac{1}{h} \text{x} \frac{h^{\frac{N}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ \exp\left\{ -\frac{h}{2} \{y - f(X, \beta)\}' \{y - f(X, \beta)\} \right\} \right\}, \tag{18}$$

$$\propto \frac{h^{\frac{N}{2}-1}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \left\{ \exp\left\{ -\frac{h}{2} \{y - f(X, \beta)\}' \{y - f(X, \beta)\} \right\} \right\}, \tag{19}$$

dengan $f(X, \beta) = \exp\big(-m^*((C^*)^x - 1)\big)$, $y = l_x$ dan $\beta = m^*\ dan\ C^*$. Distribusi prior diasumsikan normal.

Algoritma Metropolis-Hastings

Algoritma Metropolis-Hastings adalah algoritma Markov Chain Monte Carlo (MCMC) yang digunakan untuk menghasilkan sampel dari distribusi probabilitas yang sulit untuk diambil sampel langsung(Casarin et al., 2014) Algoritma ini pertama kali diperkenalkan oleh Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, dan Edward Teller pada tahun 1953, dan kemudian dimodifikasi oleh W.K. Hastings pada tahun 1970.

Algoritma Metropolis-Hastings dapat digunakan untuk mengeksplorasi distribusi posterior dalam konteks Bayesian inference, di mana kita mencari distribusi probabilitas parameter berdasarkan data pengamatan dan pengetahuan awal. Ini sangat berguna ketika tidak mungkin atau sulit menghitung distribusi posterior secara analitik (Robert, 2015).

Prinsip kerja algoritma Metropolis-hastings adalah menggunakan mekanisme penerimaan dan penolakan (*accept – reject*) untuk membangkitkan barisan sampel dari suatu distribusi yang sulit untuk dilakukan penarikan sampel (Dougherty, 2014).

Langkah-langkah dari algoritma metropolis hastings adalah sebagai berikut:

1. Memilih nilai awal θ^0 yang memenuhi $f(\theta^0) > 0$,
2. Ambil kandidat distribusi θ saat ini, sampel suatu candidate point θ^*dari jumping distribution $q\left(\theta^{(s-1)}, \theta\right)$,
3. Hitung peluang penerimaan $\alpha\left(\theta^{(s-1)}, \theta^*\right)$ dengan
$$\alpha\left(\theta^{(s-1)}, \theta^*\right) = \min\left[\frac{p(\theta=\theta^*|y)q\left(\theta^*, \theta=\theta^{(s-1)}\right)}{p(\theta=\theta^{(s-1)}|y)q\left(\theta^{(s-1)}, \theta=\theta^*\right)}, 1\right],$$
4. Set $\theta^s = \theta^*$ dengan peluang $\alpha\left(\theta^{(s-1)}, \theta^*\right)$ dan set $\theta^s = \theta^{(s-1)}$ dengan peluang $1 - \alpha\left(\theta^{(s-1)}, \theta^*\right)$,
5. Ulangi langkah 2, 3 dan 4.

Algoritma Metropolis-Hastings, menggunakan mekanisme penerimaan dan penolakan untuk membangkitkan barisan sampel dari suatu distribusi yang sulit untuk dilakukan penarikan sampel (Dougherty, 2014).

HASIL

Untuk mengestimasi parameter $m^*\ dan\ C^*$ digunakan tabel mortalita *Life table for total Population: United State, 1979-1981* (Bowers, 1986) dan nilai awal dari m, C, dan h, yang ditentukan dengan cara deterministik. Diperoleh nilai awal $m^0 = 0{,}001659$, $C^0 = 1.081291$ dan $h^0 = 7.400$. Selanjutnya gunakan algoritma Metropolis-Hastings dengan langkah yang dilakukan sebanyak N = 10^3. Langkah tersebut terus menerus dilakukan hingga mencapai ukuran sampel yang diinginkan. Pada penelitian ini ukuran original sampel adalah 10^6 dengan ukuran *burn-in* sampel adalah 1000. Sehingga diperoleh suatu rantai markov,$(m^1, C^1, h^1), (m^2, C^2, h^2), \ldots, (m^N, C^N, h^N)$.

Adapun cara kerja Metropolis-Hastings pada mortalitas stokastik dapat diuraikan sebagai berikut:

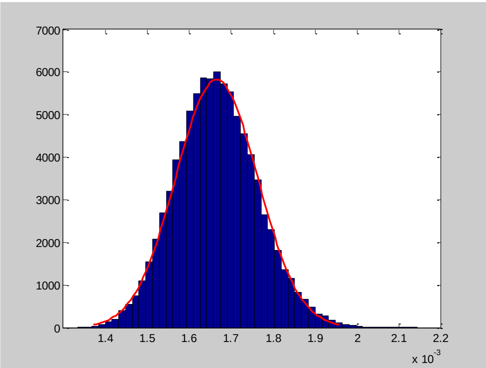
1. Mentukan nilai awal yaitu $m^0 = 0{,}001659$, $C^0 = 1.081291$, dan $h^0 = 7.400$,
2. Gunakan m^0, C^0, dan h^0 sebagai nilai sekarang m^{t-1}, C^{t-1}, dan h^{t-1}. Sampelkan *candidat point* m', C', dan h' dari *jumping distribution* $q_1(m^1, m^2), q_2(C^1, C^2)$ dan $q_3(h^1, h^2)$ yang merupakan peluang perpindahan state yang satu ke state kedua. Distribusi ini disebut sebagai *proposal distribution* (*candidate-generating distribution*).

   Pengambilan *proposal distribution* dapat menggunakan Random walk yaitu
$$m' = m^t + z_1,$$
$$C' = C^t + z_2,$$
$$h' = h^t + z_3,$$

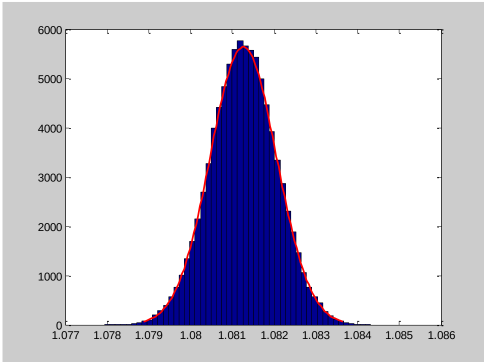
dengan z_1, z_2 dan z_3 adalah variabel acak yang diambil dari $q_1(m^1, m^2), q_2(C^1, C^2)$ dan $q_3(h^1, h^2)$.

3. Diberikan poin kandidat m', C', dan h'. Hitung rasio densitas pada kandidat $(m*, C*$, dan $h*)$ dan nilai sekarang $(m^{t-1}, C^{t-1}$, dan $h^{t-1})$, yaitu
$$\alpha = min\left[\frac{p(m\prime, C\prime, h\prime|y)}{p(m^{t-1}, C^{t-1}, h^{t-1}|y)}, 1\right].$$
4. Bangkitkan sampel acak $u \sim U(0,1)$.
5. Perbarui $m^t = m'$, $C^t = C'$ dan $h^t = h'$ dengan peluang penerimaan α dan $m^t = m^{t-1}, C^t = C^{t-1}$ dan $h^t = h^{t-1}$ dengan peluang $1 - \alpha$. Jika $u \le \alpha$, maka m', C', dan h' diterima sebagai anggota sampel, jika $u > \alpha$ maka nilai sebelumnya yang akan diterima sebagai anggota sample dan mengisi m^t, C^t, dan h^t.
6. Kembali ke langkah ke 2 dan seterusnya.

Sampel yang dihasilkan merupakan sampel yang berdistribusi normal. Hasil parameter m* dan C* yang diperoleh terlihat pada Gambar 1.



Distribusi m*



Distribusi C*

Gambar 1. Hasil Simulasi untuk Distribusi *m dan *C***

Dari hasil simulasi terlihat bahwa nilai parameter distribusi m* dan C* tidak tunggal. Dari sebaran nilai parameter yang diestimasi diperoleh nilai maksimum, minimum, dan rata-rata yang diperlihatkan oleh Tabel 1. Sementara variansi untuk m* adalah 9.525×10^{-9} dan nilai variansi untuk C* adalah 6.312134×10^{-7}.

Tabel 1. Hasil distribusi *m dan *C***

	m*	***C****
Min	0.001335144	1.077944890
Max	0.002142088	1.084307845
Mean	0.001665164	1.081264461
Modus	0.001591826	1.081587298

Perolehan nilai m* dan C* yang berdistribusi normal memiliki nilai rata-rata, nilai maksimum, minimum dan juga modus yang tertera pada Tabel 1, dapat digunakan untuk menentukan nilai premi, baik premi asuransi maupun premi dana pensiun. Premi yang diperoleh dalam bentuk rentang nilai.

PEMBAHASAN

Hukum mortalita Gompertz menggambarkan tentang pola kematian dalam kelompok populasi tertentu sehingga banyak penelitian membahas mengenai estimasi parameter pada hukum mortalitas ini. Hukum mortalitas Gompertz sering digunakan dalam asuransi jiwa dan keuangan untuk mengestimasi risiko kematian pada kelompok usia tertentu (Huang et al., 2020).

Pada penelitian ini, estimasi parameter m dan c pada hukum Gompertz dilakukan dengan pendekatan Bayesian dan simulasi numerik dilakukan menggunakan algoritma Metropolish-Hasting. Pendekatan Bayesian merupakan metode statistik yang kuat untuk memodelkan ketidakpastian dan memperhitungkan informasi prior (Sen et al., 2023). Dalam konteks estimasi hukum mortalitas Gompertz, distribusi prior ini dapat mencerminkan pengetahuan sebelumnya atau keyakinan ahli aktuaria terkait dengan tingkat kematian pada kelompok populasi tertentu (Wong et al., 2018).

Estimasi Bayesian memungkinkan pengetahuan atau keyakinan sebelumnya untuk dimasukkan ke dalam analisis, yang dapat meningkatkan ketepatan estimasi, terutama dalam situasi di mana data terbatas. Pendekatan Bayesian secara alami mengakui dan mengelola ketidakpastian dalam parameter dengan memberikan distribusi probabilitas untuk setiap parameter, memberikan gambaran yang lebih lengkap tentang risiko kematian (Fanconi et al., 2023). Selain itu, dengan adanya data tambahan, distribusi posterior dapat diperbarui. Hal ini memungkinkan model untuk berkembang seiring waktu dengan penambahan informasi baru.

Estimasi parameter hukum mortalitas Gompertz dengan pendekatan Bayesian merupakan pendekatan statistik yang kuat dan relevan dalam analisis risiko kematian. Dengan menggabungkan informasi sebelumnya, data mortalitas, dan ketidakpastian parameter, pendekatan ini memberikan kerangka kerja yang komprehensif untuk memahami dan mengestimasi tingkat kematian dalam populasi. Dalam konteks asuransi dan keuangan, pemahaman yang lebih baik tentang risiko kematian dapat membantu perusahaan mengelola risiko dengan lebih efektif (Akhmarov et al., 2023).

Distribusi $m*$ dan $c*$ yang diperoleh pada Gambar 1 dapat digunakan untuk menghitung distribusi dari peluang kematian pada tahun tertentu. Distribusi peluang kematian dalam penghitungan premi asuransi jiwa adalah perusahaan asuransi dapat menentukan premi dengan lebih akurat karena dengan memahami sebaran statistik kematian dalam populasi tertentu, perusahaan dapat menetapkan premi yang mencerminkan risiko yang sesuai dengan kelompok usia tertentu (Ibrahimpasic, 2023). Distribusi peluang kematian juga membantu perusahaan asuransi dalam manajemen risiko sehingga perusahaan terhindar dari kerugian besar akibat pembayaran klaim yang tidak terduga (Hesse et al., 2022).

Secara aktuarial, distribusi peluang kematian membantu aktuaris (profesional yang mengkaji risiko dan ketidakpastian) untuk menyesuaikan premi asuransi jiwa dengan mempertimbangkan faktor-faktor seperti harapan hidup, tingkat kematian, dan faktor risiko lainnya. Sehingga perusahaan asuransi dapat menentukan nilai klaim yang adil (Financials et al., 2018). Ini bermanfaat baik bagi pemegang polis maupun perusahaan karena membantu menghindari situasi di mana premi yang dibayarkan oleh pemegang polis jauh melebihi nilai klaim yang mungkin terjadi. Selain itu, dengan mengetahui distribusi peluang kematian, perusahaan asuransi terbantu dalam penyusunan portofolio asuransi yang seimbang (Paramasivan & Rajaram, 2016). Dengan memahami risiko pada berbagai kelompok usia, perusahaan dapat merancang produk asuransi yang sesuai dengan kebutuhan pelanggan sambil tetap menjaga keseimbangan dan keberlanjutan portofolio asuransi. Oleh karena itu, distribusi peluang kematian ini memainkan peran penting dalam aktuaria dan analisis risiko asuransi jiwa (Risalah & Rahmani, 2022; Trivedi, 2022). Dengan memanfaatkan data statistik yang relevan, perusahaan asuransi dapat membuat keputusan yang lebih baik dalam menentukan premi dan manajemen risiko.

SIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan dapat diambil beberapa kesimpulan diantaranya, bahwa pemberian unsur stokastik pada persamaan Gompertz memberikan nilai parameter *m* dan *C* yang beragam pada hukum mortalita Gompertz. Hal ini berakibat memberikan alternatif yang beragam pula untuk nilai premi pada asuransi maupun anuitas. Sehingga resiko kerugian pada Perusahaan asuransi maupun anuitas akan bisa diminimalisir. Selain itu Algoritma Metropolis-Hastings dinilai efektif dan dapat dijadikan alternatif untuk menaksir parameter dengan m dan *C* pada hukum mortalita Gompertz. Ada beberapa alternatif lain yang bisa digunakan untuk menaksir parameter salah satunya adalah dengan Gibb sampler. Mungkin ini dapat dijadikan perbandingan bagi penelitian selanjutnya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih sebesar-besarnya kepada dosen saya alm Dr. M. Syamsudin yang telah banyak mengajarkan dan memberi pengetahuan dan pemahaman tentang MCMC dan algoritma Metropolis-Hastings. Dan rekan-rekan penulis yang namanya tercantum pada paper ini serta kepada Telkom University yang telah memberikan dukungan material atas terbitnya paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

Abo-Kasem, O. E., Abdelgaffar, A., Al Mutairi, A., Khashab, R. H., & Abu El Azm, W. S. (2023). Classical and bayesian estimation for gompertz distribution under the unified hybrid censored sampling with application. *AIP Advances*, *13*(11). https://doi.org/10.1063/5.0174543

Akhmarov, A. V., Natalson, A. V., & Temirova, A. B. (2023). Change management in the era of digital transformation: how companies can effectively adapt to new business models. *Ekonomika I Upravlenie: Problemy, Resheniya*. https://api.semanticscholar.org/CorpusID:264509468

Al-Shomrani, A. A. (2023). An improvement in maximum likelihood estimation of the gompertz distribution parameters. *Journal of Statistical Theory and Applications*, *22*(1–2), 98–115. https://doi.org/10.1007/s44199-023-00057-5

Bowers, N. L. (1986). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries. https://search.worldcat.org/title/1023979578

Casarin, R., Grassi, S., Ravazzolo, F., & Dijk, H. K. van. (2014). *Parallel sequential monte carlo for efficient density combination: the deCo matlab toolbox*. https://ideas.repec.org/p/bno/worpap/2014_11

Dahl, M. (2004). Stochastic mortality in life insurance: market reserves and mortality-linked insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics*, *35*(1), 113–136. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.05.003

Dougherty, C. (2014). *Introduction to Econometrics*. https://global.oup.com/academic/product/introduction-to-econometrics-9780199676828?cc=id&lang=en&

Fanconi, C., Hond, A. de, Peterson, D., Capodici, A., & Hernandez-Boussard, T. (2023). A bayesian approach to predictive uncertainty in chemotherapy patients at risk of acute care utilization. *EBio Medicine*, *92*(104632), 1–10. https://doi.org/10.1016/j.ebiom.2023.104632

Feroze, N., & Aslam, M. (2013). On bayesian estimation and predictions for two-component mixture of the gompertz distribution. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, *12*(2), 269–292. https://doi.org/10.22237/jmasm/1383279300

Financials, C., Santos, M., & Richman, V. (2018). Annual changes in mortality rates and related effects on life insurance annual changes in mortality rates and related effects on life insurance company financials. *Journal of Applied Financial Research*, 60–72. https://www.researchgate.net/publication/329553957_Annual_Changes_in_Mortality_Rates_and_Related_Effects_on_Life_Insurance_Company_Financials

Garg, M. L., Rao, B. R., & Redmond, C. K. (1970). Maximum-likelihood estimation of the parameters of the gompertz survival function. *Journal of the Royal Statistical Society*, *19*(2), 152–159. https://doi.org/10.2307/2346545

Hegazy, M. A., El-Kader, R. E. A., El-Helbawy, A. A., & Al-Dayian, G. R. (2021). Bayesian estimation and prediction of discrete gompertz distribution. *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, *36*(2), 1–21. https://doi.org/10.9734/jamcs/2021/v36i230335

Hesse, C. A., Boyetey, D. B., & Ashoagbor, A. A. (2022). Comparing the distributions of aggregate claims for different probability distributions under reinsurance arrangements. *Advances and Applications in Statistics*, *73*, 75–98. https://doi.org/10.17654/0972361722011

Huang, F., Maller, R., & Ning, X. (2020). Modelling life tables with advanced ages: Aan extreme value theory approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, *93*, 95–115. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2020.04.004

Ibrahimpasic, B. (2023). Vjerojatnost dozivljenja i smrtiza dvije i vise osoba kod obracuna zivotnog osiguranja. *Bernadin Ibrahimpasic*, *9*(13), 67–75. https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=1176979

Koop, G. (2003). *Bayesian econometrics*. Wiley, Chichester. https://www.wiley.com/en-us/Bayesian+Econometrics-p-9780470845677

Lenart, A. (2012). *The gompertz distribution and maximum likelihood estimation of its parameters*. https://www.demogr.mpg.de/en/publications_databases_6118/publications_1904/mpidr_working_papers/the_gompertz_distribution_and_maximum_likelihood_estimation_of_its_parameters_a_revision_4345

Liu, X. (2008). *Stochastic mortality modelling* [Universitas Toronto]. https://tspace.library.utoronto.ca/bitstream/1807/11117/1/Liu_Xiaoming_Jr_200803_PhD_thesis.pdf

Miasary, S. D. (2022). Annual premium determination for joint life insurance with de moivre and gompertz's mortality laws. *Square : Journal of Mathematics and Mathematics Education*, *4*(2), 117–123. https://doi.org/10.21580/square.2022.4.2.13212

Obeidat, M., Al-Nasser, A., & Al-Omari, A. I. (2020). Estimation of generalized gompertz distribution parameters under ranked-set sampling. *Journal of Probability and Statistics*, 1–14. https://doi.org/10.1155/2020/7362657

Paramasivan, C., & Rajaram, S. (2016). Micro insurance portfolio of public and private sector insurance companies. *IJSSIR: International Journal of Social Science & Interdisciplinary Research*, *5*(3), 72–77. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4411639

Putra, D. A., Fitriyati, N., & Mahmudi, M. (2019). Fit of the 2011 indonesian mortality table to gompertz law and makeham law using maximum likelihood estimation. *InPrime: Indonesian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *1*(2), 68–76. https://doi.org/10.15408/inprime.v1i2.13276

Risalah, M., & Rahmani, N. A. B. (2022). Actuarial aspects in life insurance. *Jurnal Ekonomi, Manajemen, Akuntansi Dan Keuangan*, *3*(3), 1017–1024. https://doi.org/10.53697/emak.v3i3.644

Robert, C. P. (2015). The metropolis– hastings algorithm. *Wiley StatsRef: Statistics Reference Online*, 1–15. https://doi.org/10.1002/9781118445112.stat07834

Sen, S., Kundu, D., & Das, K. (2023). A flexible bayesian variable selection approach for modeling interval data. *Statistical Methods & Applications*. https://doi.org/10.1007/s10260-023-00727-9

Tai, T. H., & Noymer, A. (2018). Models for estimating empirical gompertz mortality: with an application to evolution of the gompertzian slope. *Population Ecology*, *60*, 171–184. https://doi.org/10.1007/s10144-018-0609-6

Trivedi, S. (2022). A risk management framework for life insurance companies. *Journal of Corporate Governance, Insurance, and Risk Management*, *9*(1), 89–111. https://doi.org/10.51410/jcgirm.9.1.6

Wong, J. S. ., Forster, J. J., & Smith, P. W. F. (2018). Bayesian mortality forecasting with overdispersion. *Insurance: Mathematics and Economics*, *83*, 206–221. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.09.023