ZERO – JURNAL MATEMATIKA DAN TERAPAN
Volume 3 No. 1 2018
Page: 1-7
P-ISSN: 2580-569X
E-ISSN : 2580-5754

# GRACEFUL LABEING AND RHO TOPI LABELING ON THE 8-BINTANG GRAPH WITH C3 FOR N ODD

**Zulfi Amri[1], Tua Halomoan Harahap[1] and Irvan[1]**
[1]Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara
Email: zulfiamri@umsu.ac.id, tuahalomoan@umsu.ac.id, irvan@umsu.ac.id

***Abstract.*** *This paper we propose graceful labeling and $\hat{\rho}$ labeling on a graph then referred to as 8-Bintang graph, the basic idea of formulation graceful labeling and $\hat{\rho}$ labeling on an alfabet bintang graphs wih the question a stars graph $S_n$. Then we constructing graceful labeling and $\hat{\rho}$ labeling on the 8-Bintang graph with circle graph $C_3$ for $n$ odd. The results obtained are illustrated in the theorem that the 8-Bintang graph with $C_3$ for $n$ odd has the following graceful labeling with the proof.*

**Keywords:** graceful labeling, $\hat{\rho}$ labeling, 8-Bintang Graph

**Abstrak.** Pada makalah ini kami mengemukakan pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf yang kemudian disebut sebagai graf 8-Bintang, ide dasar pembentukannya bermula dari graf alfabet bintang dengan pertanyaan bagaimana jika bilangan diberikan graf bintang $S_n$. kami mengkonstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf 8-Bintang dengan unsur pembentuk graf lingkaran $C_3$ dengan banyak simpul pada masing-masing bintangnya berjumlah ganjil. Hasil yang diperoleh tergambar pada teorema bahwa graf 8-Bintang unsur pembentuk $C_3$ dengan $n$ ganjil memiliki pelabelan graceful berikut dengan buktinya.

**Kata Kunci:** pelabelan graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf 8-Bintang

## 1. INTRODUCTION

Pelabelan pada graf pada dasarnya merupakan pemberian nilai tertentu pada simpul, busur dan atau keduanya yang memenuhi aturan tertentu (Amri dan Harahap, 2017). Galian mencatat hasil penelitian tentang pelabelan graf selama 50 tahun terakhir sampai data tertanggal 23 Desember 2016 terdapat 2.264 makalah yang membahas berbagai macam pelabelan, secara garis besar pelabelan yang dibahas meliputi pelabelan graceful dan variasinya, pelabelan harmonis dan variasinya, pelabelan ajaib dan variasinya, pelabelan anti ajaib beserta variasinya, pelabelan jumlah dan variasinya serta pelabelan lainnya (Galian, 2016).

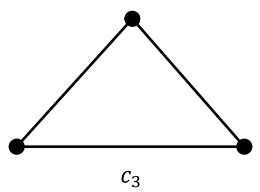
Pelabelan graceful pertamakali diperkenalkan oleh alek rosa pada tahun 1966 dengan sebutan $\alpha - labeling$ atau $\alpha - voluation$ [2]. Pelabelan graceful pada suatu graf $G(V, E)$ merupakan fungsi injektif $\alpha$ dari himpunan simpul $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, q\}$ sedemikian sehingga setiap busur $uv \in E(G)$ diberikan label $|\alpha(u) - \alpha(v)|$, label busur yang di peroleh akan membetuk suatu himpunan bilangan $\{1,2, \dots, q\}$ secara bijektif, dimana $q$ adalah banyak busur pada graf $G(V, E)$.[1,2,3]. Sedangkan pelabelan $\hat{\rho}$ merupakan variasi dari pelabelan graceful dengan menambahkan perluasan pada kodomainnya secara spesipik pelabelan $\hat{\rho}$ berupa fungsi injektif $g$ yang memetakan semua simpul $V(G)$ ke himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,q+1\}$ yang menginduksikan fungsi bijektif $E(G)$ ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,q\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $\beta'(uv) = |\beta(u) - \beta(v)|$. (Amri dan Harahap, 2017. Galian, 2016. dan Amri, dkk. 2011 ).

Banyak hasil penelitian tentang pelabelan graceful dan variasinya yang telah dilakukan diantaranya secara umum Galian juga menghimpun beberapa graf yang memenuhi pelabelan graceful beserta dengan beberapa variasinya yaitu keseluruhan graf lingkaran $C_n$ untuk $n \equiv 0 \, mod \, 4$ dan $n \equiv 3 mod \, 4$ berserta dengan gabungan dengan one-point pada graf cycle dengan sifat $n + m \equiv 0 \, mod \, 4$, graf roda, seluruh graf pohon seperti graf lintasan, graf cartefilar, graf firecarakter, graf lobters, graf banana trees (Galian, 2016).

Selain itu amri juga menunjukkan sub bagian dari graf pohon yaitu graf ilalang ($S_n$,r) untuk $r \geq 3$, yang telah dibuktikan memiliki pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $3 \leq r \leq 5$ (Amri, 2011), selanjutnya graf kelabang (Amri dan Sugeng, 2011), graf H-Bintang dan graf A-Bintang (Huda dan Amri, 2012).

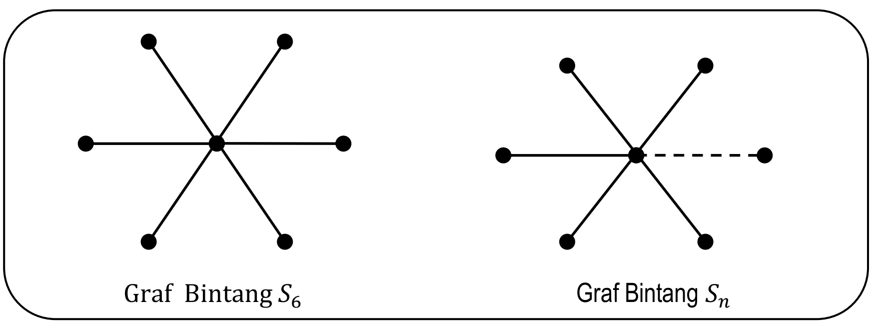
Ide dasar mengkonstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-bintang berawal dari graf A-Bintang dan H-Bintang yang kemudian disebut sebagai graf alfabet bintang dengan pertanyaan bagaimana jika bilangan diberikan graf bintang $S_n$ yang kemudian suatu graf yang dibangun dari 2 graf lingkaran dimana salah satu simpul dari graf lingkaran menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang $S_n$(Amri dan Harahap, 2017).

***Graf lingkaran (cycle)*** dengan panjang $n$ adalah graf dengan $n$ simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan busur $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$, $v_nv_1$. Pada Gambar 1.1 diberikan contoh graf lingkaran $C_3$, $C_4$, $C_5$. (Amri dan Harahap, 2017. Rosen, 2007. Bača dan Miller, 2008).




**Gambar 1.1** Graf Lingkaran (cycle)

ian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpuls pusat tersebut. Graf bintang memiliki $n$+1 simpul dan $n$ busur (Rosen, 2007. Bača dan Miller, 2008).




**Gambar 1.2** Graf Bintang

Pada makalah ini kami akan membangun graf 8-Bintang dengan unsur pembentuk c3 dengan n ganjil. Beberapa graf yang sedang dikerjakan oleh amri dan kawan-kawan yaitu graf 8-Bintang dengan unsur pembentuk C4, c5 c6 dengan n genap dan ganjil, dan graf ilalang untuk r> 5.

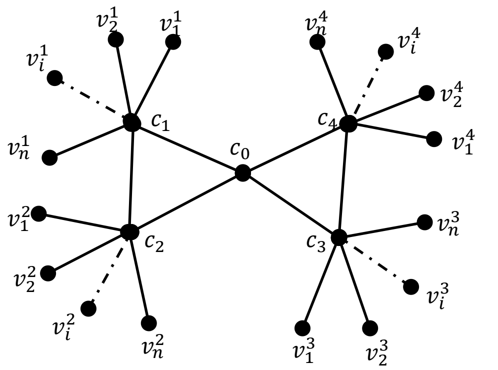
## 2. METHODE

Penelitian dilakukan pada makalah ini dengan mempelajari karya-karya ilmiah yang disajikan dalam bentuk buku, tesis ataupun paper yang relevan dengan topik penelitian. Hasil pengkajian dilanjutkan dengan mengkonstruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-Bintang untuk unsur pembentuk $C_3$ dengan $n$ ganjil.

## 3. RESULTS AND DISCUSSION

### 3.1. *Definisi dan Notasi Graf 8-Bintang*

**Graf 8-bintang** dengan unsur pembangun $C_3$ (Gambar 1.3) adalah suatu graf yang dibangun dari 2 graf lingkaran $C_3$ dimana salah satu simpul dari graf lingkaran $C_3$ menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang $S_n$. Oleh karena itu dapat diberikan simbol untuk graf 8-Bintang dengan $C_n^{(2)}\ S_n$. Berikut diberikan bentuk umum dan notasi graf 8-Bintang pada Gambar 3.1




**Gambar 3.1** Notasi Graf 8-Bintang $C_3^{(2)}\ S_n$

### 3.2. Pelabelan Graceful pada graf 8-Bintang $C_3$ untuk $n$ ganjil

Pada bagaian ini akan dibangun persamaan-persaman yang akan menunjukkan bahwa graf 8-Bintang memenuhi pelabelan Graceful sehingga graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk $n$ ganjil disebut graf graceful yang tertuang pada teorema 3.1 di bawah ini.

**Teorema 3.1** Graf 8-Bintang dengan unsur pembentuk $C_3$ untuk $n$ ganjil
**Bukti.** Misalkan notasi simpul graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk $n$ ganjil diberikan pada Gambar 3.1

Terlihat pada gambar 3.1 diatas menunjukkan notasi setiap simpul pada graf 8-Bintang yaitu himpunan $\{ c_0, \dots, c_4, v_1^1, .., v_n^1, v_1^2, \dots, v_n^2, v_1^3, \dots, v_n^3, v_1^4, \dots, v_n^4\}$, sehingga dapat ditunjukkan pula himpunan busur graf 8-Bintang adalah$\{c_0c_1, c_1c_2, c_2c_0, c_0c_3, c_3c_4, c_4c_0, c_1v_1^1, \dots, c_1v_n^1, c_2v_1^2, \dots, c_2v_n^2, c_3v_1^3, \dots, c_3v_n^3, c_4v_1^4, \dots, c_4v_n^4\}$ secara otomatis dapat pula dihitung banyaknya elemen simpul dan elemen busur graf 8-Bintang yaitu $|V| = 4n + 5$ dan $|E| = 4n + 6$.

Diberikan definisi pelabelan dengan mengunakan notasi $\alpha$ untuk semua simpul pada graf 8-Bintang sebagai berikut :

$\alpha(c_0) = n + 1$ (3.1)
$\alpha(c_1) = 0$ (3.2)
$\alpha(c_2) = 3n + 6$ (3.3)
$\alpha(c_3) = 3n + 5$ (3.4)
$\alpha(c_4) = n + 2$ (3.5)
$\alpha(v_i^1) = 4n + 7 - i;$ *i =1,2…,n* (3.6)
$\alpha(v_i^2) = i;$ *i =1,2…,n* (3.7)

$$\alpha(v_i^3) = \begin{cases} 4n - 1 - 2i; & i = 1,2,\dots,\frac{n-1}{2} \\ 4n - 2 - 2i; & i = \frac{n-1}{2} + 1,\dots,n \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\alpha(v_i^4) = \begin{cases} n + 2 + 2i; & i = 1,2,\dots,\frac{n-1}{2} \\ n + 3 + 2i; & i = \frac{n-1}{2} + 1,\dots,n \end{cases} \tag{3.9}$$

Pelabelan $\alpha$ yang didefinisikan pada (3.1)-(3.9) akan melabelkan setiap simpul elemen graf 8-Bintang mulai bilangan terkecil 0 sampai bilangan terbesar yaitu $4n + 6$ dengan tidak terjadi pengulanagan satu bilanganpun dan berdasarkan defenisi pelabelan graceful yang memetakan simpul pada $G$ ke himpulan bilangan $\{0, 1, \dots, |E|\}$ secara injektif terpenuhi pada graf 8-Bintang. Untuk dapat dikatakan memenuhi pelabelan graceful selain simpul akan ditunjukkan bahwa busur-busur merupakan selisih mutlak dari simpul-simlul yang bertetangga ditunjukkan pada (3.10) sampai (3.21) dibawah ini:

$\alpha'(c_0c_1) = |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| = |(n+1) - (0)| = n+1$ (3.10)
$\alpha'(c_1c_2) = |\alpha(c_1) - \alpha(c_2)| = |(0) - (3n + 6)| = 3n + 6$ (3.11)
$\alpha'(c_2c_0) = |\alpha(c_2) - \alpha(c_0)| = |(3n + 6) - (n+1)\ = 2n+5$ (3.12)
$\alpha'(c_0c_3) = |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| = |(n+1) - (3n + 5)| = 2n + 4$ (3.13)
$\alpha'(c_3c_4) = |\alpha(c_3) - \alpha(c_4)| = |(3n + 5) - (n + 2)| = 2n + 3$ (3.14)
$\alpha'(c_4c_0) = |\alpha(c_4) - \alpha(c_0)| = |(n + 2) - (n+1)| = 1$ (3.15)
$\alpha'(c_1v_i^1) = |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)| = |(0) - (4n + 7 - i)| = 4n + 7 - i;$
*i =1,2…,n* (3.16)
$\alpha'(c_2v_i^2) = |\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)| = |(3n + 6) - i| = 3n + 6 - i;$
*i =1,2…,n* (3.17)

Pada (3.8), $\alpha(v_i^3)$ mempunyai dua kondisi yang dibatasi oleh banyak simpul sampai $\frac{n-1}{2}$ maka nilai busur yang bertetangga dengan simpul $\alpha(v_i^3)$ dapat dinyatakan sesuai yang disebutkan pada kondisi-kondisi di (3.8) yaitu untuk $i = 1,2,\dots,\frac{n-1}{2}$ sehingga diperoleh (3.18) dan untuk kondisi $i = \frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n + 2, \dots, n$ diperoleh (3.19) dibawah ini:

$\alpha'(c_3v_i^3) = |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)| = |(3n + 5) - (4n - 1 - 2i)| = n + 4 - 2i;$
$i = 1,2,\dots,\frac{n-1}{2}$ (3.18)
$\alpha'(c_3v_i^3) = |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)| = |(3n + 5) - (4n - 2 - 2i)| = n + 3 - 2i;$
$i = \frac{n-1}{2} + 1,\dots,n$ (3.19)

Hal yang sama dilakukan untuk memperoleh $\alpha'(c_4 v_i^4)$ dengan kondisi yang dinyatakan pada (3.9) dapat diperoleh nilai busur $\alpha'(c_4 v_i^4)$ seperti pada (3.20) dan (3.21) berikut:

$$\alpha'(c_4 v_i^4) = \left|\alpha(c_4) - \alpha(v_i^4)\right| = |(n+2) - (n+2+2i)| = 2i; \quad i = 1,2,\dots,\tfrac{n-1}{2} \quad (3.20)$$

$$\alpha'(c_4 v_i^4) = \left|\alpha(c_4) - \alpha(v_i^4)\right| = |(n+2) - (n+3+2i)| = 2i+1;$$
$$i = \tfrac{n-1}{2} + 1, \dots, n \quad (3.21)$$

Berdasarkan pelabelan $\alpha$ yang didefinisikan pada (3.1) - (3.9) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan sub himpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|\}$ dan selalu tidak memuat pelabelan simpul $2n+3$ dan $3n+4$. Kemudian pelabelan $\alpha'$ yang diinduksi oleh pelabelan simpul $\alpha$, memberikan nilai yang berbeda pula pada masing-masing busur seperti pada persamaan (3.10)–(3.21) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Berdasarkan hasil diatas, maka $\alpha$ merupakan pelabelan *graceful* pada graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk $n$ ganjil. ■

### 3.3. *Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Graf 8-Bintang Dengan $C_3$ Untuk $n$ Ganjil*

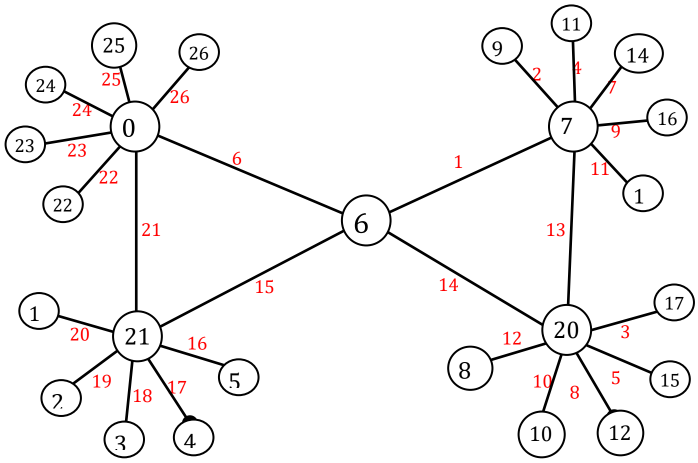
Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-bintang.

**Akibat 3.2.** Graf 8-Bintang dengan $C_3$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$ untuk $n$ ganjil

**Bukti.** Misal notasi graf 8-bintang dengan $C_3$ ditunjukkan pada Gambar 3.1

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian *graceful* pada Teorema 3.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\beta = \alpha$ seperti (2.1) sampai (2.9) dan pelabelan busur $\beta'(uv) = |\beta(u) - \beta(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u, v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari graf 8-bintang ke subhimpunan bilangan $\{0,1,2,\dots,|E|+1\}$, dan pelabelan busur dari graf 8-Bintang ke himpunan bilangan $\{1,2,\dots,|E|\}$. Jadi graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk $n$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

Berikut ini contoh pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-Bintang




**Gambar 3.2** Contoh Graf 8-Bintang dengan $C_3$

## 4. CONCLUSIONS

Teorema 3.1 dan akibat 3.2 pada hasil dan diskusi diatas telah diberikan kontruksi pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk $n$ ganjil yang dibangun dari 2 graf lingkaran dimana salah satu simpul dari graf lingkaran menjadi pusat graf tersebut sedangkan simpul lainnya diberikan graf bintang $S_n$. Lebih umum dapat dibuktikan bahwa graf 8-Bintang memiliki pelabelan graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

## 5. ACKNOWLEDGMENT

Terimakasih kami kepada DPRM Kemenristek Dikti yang telah memfasilitasi pembiayaan terhadap penelitian dengan skema Penelitian Dosen Pemula yang berjudul Pelabelan Graceful, Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\boldsymbol{\hat{\rho}}$ Pada Graf 8-Bintang, tahun pembiayaan 2017, selanjutnya terimakasih kepada seluruh pimpinan Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara yang telah memfasilitasi dalam pelaksanaan penelitian ini.

## 6. REFERENCES

[1] Z. Amri dan T.H Harahap "Pelabelan Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf 8-Bintang dengan $C_3$ untuk n Genap". EduTech Jurnal Ilmu Pendidikan dan Ilmu Sosial vol. 3 no. 2. Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Muhammadiyah Sumatera Utara, Medan, hal 1-5, September 2017.

[2] J. A. Galian "Dynamic survey of graph Lebeling. *Electronic Journal of combinatorics, 19th edition. USA. Desember, 2016.*

[3] Z. Amri ,M. Ahmad , N. Huda, Supriadi, K.A. Sugeng. *"Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf* ($S_n,3$)*".* Prosiding Seminar Nasional UNY, hal. M 131- M 136, Yogyakarta 2011.

[4] Z. Amri "Pelabelan Graceful , Skolem Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf family Bintang : Graf Ilalang, Graf Kelabang Graf A-Bintang, Graf H-Bintang.Thesis. Universitas Indonesia, Depok. 2011.

[5] Z. Amri dan K.A. Sugeng, "Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Pada Graf Kelabang". Jurnal Euria Pendendidikan Matematika FKIP UMSU, Medan, volume 4 no. 2, hal 109-115. 2011.

[6] N. Huda dan Z. Amri. "Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan Rho Topi Pada Graf A-Bintang dan H-Bintang". Jurnal Matematika Murni dan Terapan EPSILON. Banjarbaru. Volume 6 no. 2. hal. 30-37. Desember 2012

[7] Rosen, K. H. *Discrete Mathematics and Its Applications* (6th ed.). Toronto: McGraw-Hill. 2007.

[8] Bača and Miller. *Super Edge-Antimagic Graphs*: *A Wealth of Problems and Some Solution*. USA: Brown Walker Press. 2008.